Automaták irányítása

Iván Szabolcs

2009. szeptember 22.

Véges automaták

Automata

Automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q a véges, nemüres állapothalmaz;
- A a véges, nemüres input ábécé;
- $\delta : Q \times A \to Q$ az átmenetfüggvény.

$q \cdot u$

A szokott módon δ kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \to Q$ leképezéssé. $\delta(p, u)$ helyett egyszerűen $p \cdot u$ vagy pu szerepel majd, ha δ egyértelműen kiderül a környezetből.

Pu

Ha $P \subseteq Q$ és $u \in A^*$, legyen $Pu = \{pu : p \in P\}$.

Véges automaták

Automata

Automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q a véges, nemüres állapothalmaz;
- A a véges, nemüres input ábécé;
- $\delta : Q \times A \rightarrow Q$ az átmenetfüggvény.

$q \cdot u$

A szokott módon δ kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \rightarrow Q$ leképezéssé. $\delta(p, u)$ helyett egyszerűen $p \cdot u$ vagy pu szerepel majd, ha δ egyértelműen kiderül a környezetből.

Pu

Ha $P \subseteq Q$ és $u \in A^*$, legyen $Pu = \{pu : p \in P\}$.

Véges automaták

Automata

Automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q a véges, nemüres állapothalmaz;
- A a véges, nemüres input ábécé;
- $\delta : Q \times A \to Q$ az átmenetfüggvény.

$q \cdot u$

A szokott módon δ kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \to Q$ leképezéssé. $\delta(p, u)$ helyett egyszerűen $p \cdot u$ vagy pu szerepel majd, ha δ egyértelműen kiderül a környezetből.

Pu

Ha $P \subseteq Q$ és $u \in A^*$, legyen $Pu = \{pu : p \in P\}$.

Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \quad pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \;\; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \ pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

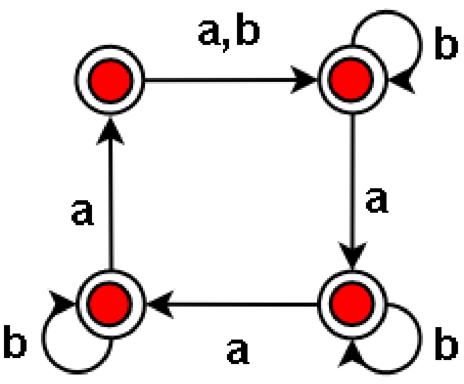
Példa

Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \;\; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

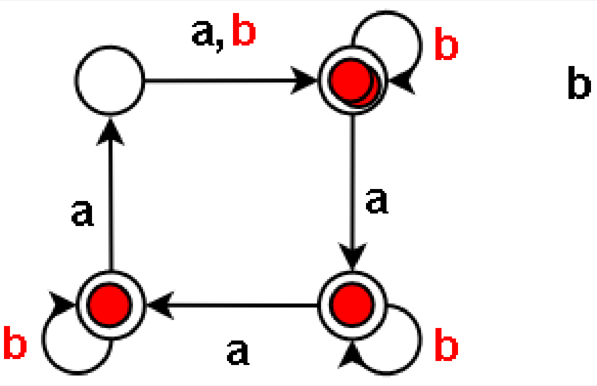


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

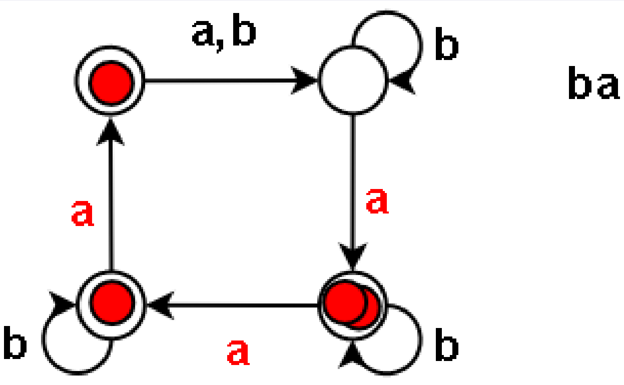


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

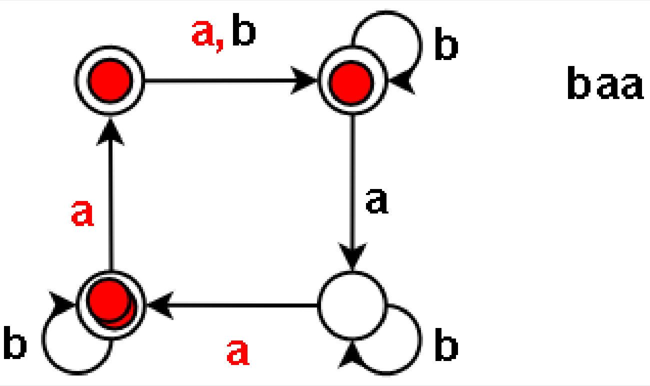


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \ pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

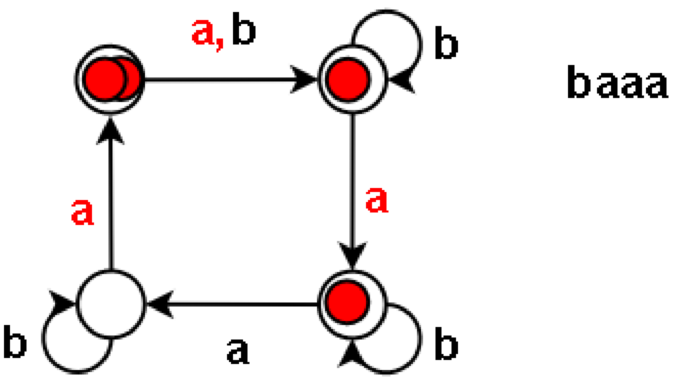


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

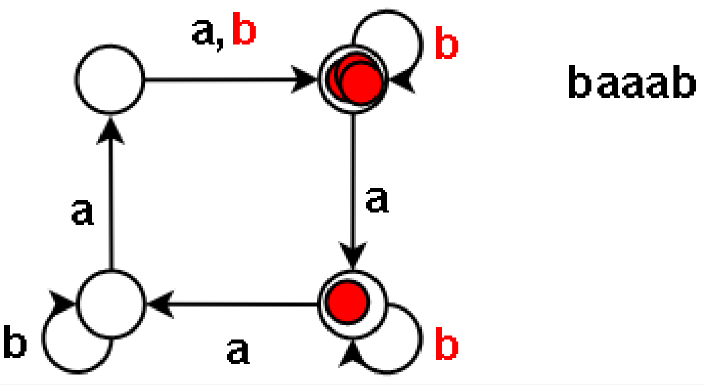


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

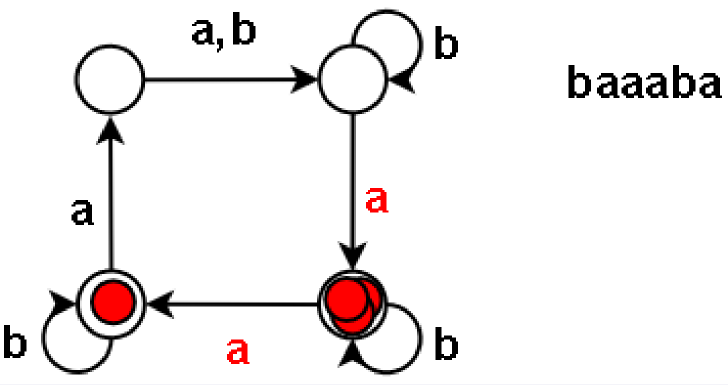


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \;\; pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

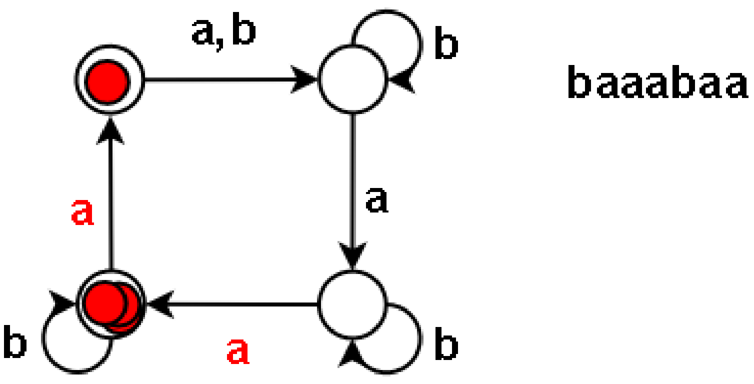


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q : \ pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

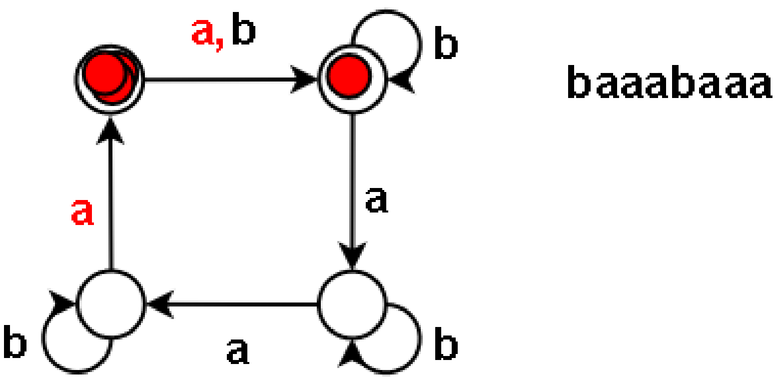


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \ pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa

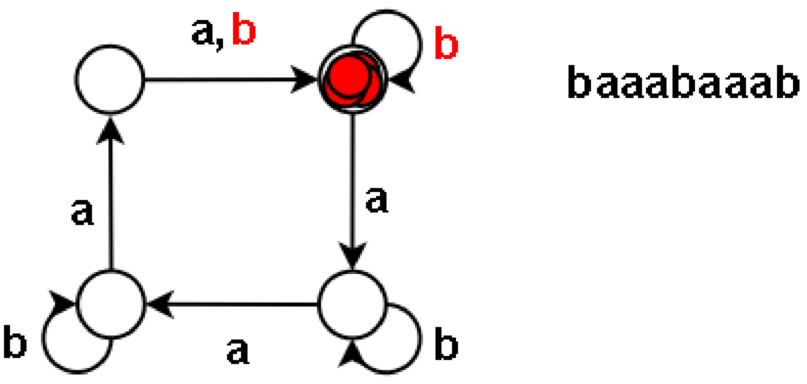


Irányítás (J. Černý, 1964.)

Irányító szó

Az $M = (Q, A, \delta)$ automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha $|Qu| = 1$.
Vagyis ha $\forall p, q: \ pu = qu$.
M irányítható, ha van irányító szava.

Példa



$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d(n) = \max\{d(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d(n) = \max\{d(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) \;=\; \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d(n) \;=\; \max\{d(M) : \; M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) \;=\; \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d(n) \;=\; \max\{d(M) : \; M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d(n) = \max\{d(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d(n) = \max\{d(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

$d(M), d(n)$

$d(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

Az előbbi példa automatára $d(M) = 9$.

$d(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

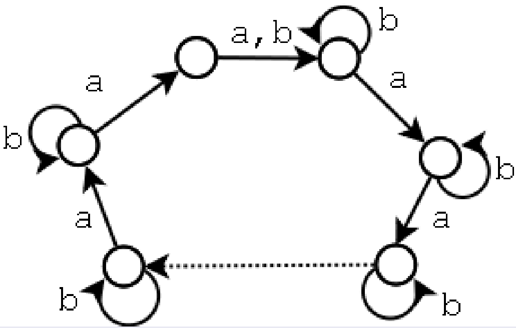
$$d(n) = \max\{d(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos automata}\}.$$

$d(n)$ kis n-ekre

- $d(1) = 0$.
- $d(2) = 1$.
- $d(3) = 4$.
- $d(4) = 9$.

A Sejtés

$d(n) \geq (n-1)^2$ (Černý, 1964)



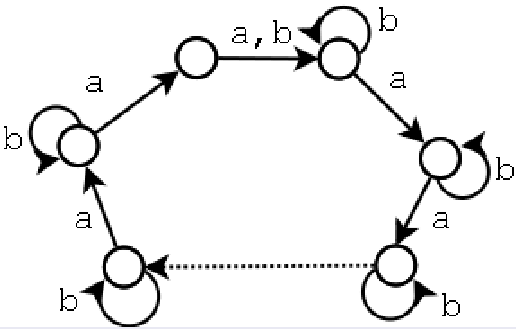
Legrövidebb irányító szó: $(ba^{n-1})^{n-2}b$, hossza $(n-1)^2$

A Černý-sejtés

$$d(n) \stackrel{?}{=} (n-1)^2$$

A Sejtés

$d(n) \geq (n-1)^2$ (Černý, 1964)



Legrövidebb irányító szó: $(ba^{n-1})^{n-2}b$, hossza $(n-1)^2$

A Černý-sejtés

$$d(n) \stackrel{?}{=} (n-1)^2$$

$d(n) \leq 2^n - n - 1$

Hatványautomata

Legyen $P_M = (P(Q), A, \delta')$ az M hatványautomatája:
$\delta'(P, a) = \{\delta(p, a) : p \in P\}$.

Észrevétel

$$
\begin{aligned}
u \text{ irányítja } M\text{-et} \quad &\Leftrightarrow \quad |\delta(Q, u)| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |\delta'(Q, u)| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad P_M\text{-ben } u \text{ egyelemű halmazba viszi } Q\text{-t.}
\end{aligned}
$$

Tehát $d(M)$ ugyanannyi, mint P_M-ben a Q-ból a $\{\{q\} : q \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $2^n - n - 1$.

$d(n) \leq 2^n - n - 1$

Hatványautomata

Legyen $P_M = (P(Q), A, \delta')$ az M hatványautomatája:
$\delta'(P, a) = \{\delta(p, a) : p \in P\}$.

Észrevétel

$$
\begin{aligned}
u \text{ irányítja } M\text{-et} \quad &\Leftrightarrow \quad |\delta(Q, u)| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |\delta'(Q, u)| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad P_M\text{-ben } u \text{ egyelemű halmazba viszi } Q\text{-t.}
\end{aligned}
$$

Tehát $d(M)$ ugyanannyi, mint P_M-ben a Q-ból a $\{\{q\} : q \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $2^n - n - 1$.

$d(n) \leq 2^n - n - 1$

Hatványautomata

Legyen $P_M = (P(Q), A, \delta')$ az M hatványautomatája:
$\delta'(P, a) = \{\delta(p, a) : p \in P\}$.

Észrevétel

$$
\begin{aligned}
u \text{ irányítja } M\text{-et} \quad & \Leftrightarrow \quad |\delta(Q, u)| = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad |\delta'(Q, u)| = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad P_M\text{-ben } u \text{ egyelemű halmazba viszi } Q\text{-t.}
\end{aligned}
$$

Tehát $d(M)$ ugyanannyi, mint P_M-ben a Q-ból a $\{\{q\} : q \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.

Ez legfeljebb $2^n - n - 1$.

$d(n) \leq 2^n - n - 1$

Hatványautomata

Legyen $P_M = (P(Q), A, \delta')$ az M hatványautomatája:
$\delta'(P, a) = \{\delta(p, a) : p \in P\}$.

Észrevétel

$$\begin{aligned} u \text{ irányítja } M\text{-et} \quad &\Leftrightarrow \quad |\delta(Q, u)| = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |\delta'(Q, u)| = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad P_M\text{-ben } u \text{ egyelemű halmazba viszi } Q\text{-t.} \end{aligned}$$

Tehát $d(M)$ ugyanannyi, mint P_M-ben a Q-ból a $\{\{q\} : q \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $2^n - n - 1$.

Páronkénti összeejtés

Észrevétel

M irányítható $\Leftrightarrow$ minden $p, q \in Q$-ra van u, amire $pu = qu$.

- $\Rightarrow$: triviális
- $\Leftarrow$: ha $|P| \geq 2$, akkor legyen $p \neq q \in P$.
  Vegyünk egy u szót, amire $pu = qu$.
  Akkor $|Pu| < |P|$. Innen indukció $|P|$ szerint.

Páronkénti összeejtés

Észrevétel

M irányítható $\Leftrightarrow$ minden $p, q \in Q$-ra van u, amire $pu = qu$.

- $\Rightarrow$: triviális
- $\Leftarrow$: ha $|P| \geq 2$, akkor legyen $p \neq q \in P$.
  Vegyünk egy u szót, amire $pu = qu$.
  Akkor $|Pu| < |P|$. Innen indukció $|P|$ szerint.

Páronkénti összeejtés

Észrevétel

M irányítható $\Leftrightarrow$ minden $p, q \in Q$-ra van u, amire $pu = qu$.

- $\Rightarrow$: triviális
- $\Leftarrow$: ha $|P| \geq 2$, akkor legyen $p \neq q \in P$.
  Vegyünk egy u szót, amire $pu = qu$.
  Akkor $|Pu| < |P|$. Innen indukció $|P|$ szerint.

Páronkénti összeejtés

Észrevétel

M irányítható $\Leftrightarrow$ minden $p, q \in Q$-ra van u, amire $pu = qu$.

- $\Rightarrow$: triviális
- $\Leftarrow$: ha $|P| \geq 2$, akkor legyen $p \neq q \in P$.
  Vegyünk egy u szót, amire $pu = qu$.
  Akkor $|Pu| < |P|$. Innen indukció $|P|$ szerint.

Páronkénti összeejtés

Észrevétel

M irányítható $\Leftrightarrow$ minden $p, q \in Q$-ra van u, amire $pu = qu$.

- $\Rightarrow$: triviális
- $\Leftarrow$: ha $|P| \geq 2$, akkor legyen $p \neq q \in P$.
  Vegyünk egy u szót, amire $pu = qu$.
  Akkor $|Pu| < |P|$. Innen indukció $|P|$ szerint.

Páronkénti összeejtés

Észrevétel

M irányítható $\Leftrightarrow$ minden $p, q \in Q$-ra van u, amire $pu = qu$.

- $\Rightarrow$: triviális
- $\Leftarrow$: ha $|P| \geq 2$, akkor legyen $p \neq q \in P$.
  Vegyünk egy u szót, amire $pu = qu$.
  Akkor $|Pu| < |P|$. Innen indukció $|P|$ szerint.

$d(n) = O(n^3)$

Segédautomata M-hez

Legyen $M^2 = (Q^2, A, \delta^2)$, ahol $\delta^2((p,q),a) = (\delta(p,a), \delta(q,a))$.
(Direkt szorzat önmagával.)

Észrevétel

$pu = qu$ pontosan akkor, ha M^2-ben $(p,q)u = (r,r)$ valamilyen r-re.
Tehát a $\{p,q\}$ halmazt összeejtő legrövidebb szó hossza ugyanannyi, mint M^2 gráfjában a (p,q)-ból a $\{(r,r) : r \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $n^2 - n$.

Következmény

$$d(n) \leq (n^2 - n)(n-1) = n^3 - 2n^2 + n.$$

$d(n) = O(n^3)$

Segédautomata M-hez

Legyen $M^2 = (Q^2, A, \delta^2)$, ahol $\delta^2((p,q),a) = (\delta(p,a), \delta(q,a))$.
(Direkt szorzat önmagával.)

Észrevétel

$pu = qu$ pontosan akkor, ha M^2-ben $(p,q)u \; = \; (r,r)$ valamilyen r-re.
Tehát a $\{p,q\}$ halmazt összeejtő legrövidebb szó hossza ugyanannyi, mint M^2 gráfjában a (p,q)-ból a $\{(r,r) : r \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $n^2 - n$.

Következmény

$$d(n) \; \leq \; (n^2 - n)(n-1) = n^3 - 2n^2 + n.$$

$d(n) = O(n^3)$

Segédautomata M-hez

Legyen $M^2 = (Q^2, A, \delta^2)$, ahol $\delta^2((p,q),a) = (\delta(p,a), \delta(q,a))$.
(Direkt szorzat önmagával.)

Észrevétel

$pu = qu$ pontosan akkor, ha M^2-ben $(p,q)u = (r,r)$ valamilyen r-re.
Tehát a $\{p,q\}$ halmazt összeejtő legrövidebb szó hossza ugyanannyi, mint M^2 gráfjában a (p,q)-ból a $\{(r,r) : r \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $n^2 - n$.

Következmény

$$d(n) \leq (n^2 - n)(n-1) = n^3 - 2n^2 + n.$$

$d(n) = O(n^3)$

Segédautomata M-hez

Legyen $M^2 = (Q^2, A, \delta^2)$, ahol $\delta^2((p,q),a) = (\delta(p,a), \delta(q,a))$.
(Direkt szorzat önmagával.)

Észrevétel

$pu = qu$ pontosan akkor, ha M^2-ben $(p,q)u = (r,r)$ valamilyen r-re.
Tehát a $\{p,q\}$ halmazt összeejtő legrövidebb szó hossza ugyanannyi, mint M^2 gráfjában a (p,q)-ból a $\{(r,r) : r \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $n^2 - n$.

Következmény

$$d(n) \le (n^2 - n)(n-1) = n^3 - 2n^2 + n.$$

$d(n) = O(n^3)$

Segédautomata M-hez

Legyen $M^2 = (Q^2, A, \delta^2)$, ahol $\delta^2((p,q),a) = (\delta(p,a), \delta(q,a))$.
(Direkt szorzat önmagával.)

Észrevétel

$pu = qu$ pontosan akkor, ha M^2-ben $(p,q)u \; = \; (r,r)$ valamilyen r-re.
Tehát a $\{p,q\}$ halmazt összeejtő legrövidebb szó hossza ugyanannyi, mint M^2 gráfjában a (p,q)-ból a $\{(r,r) : r \in Q\}$ halmazba vezető legrövidebb út hossza.
Ez legfeljebb $n^2 - n$.

Következmény

$$d(n) \; \leq \; (n^2 - n)(n-1) = n^3 - 2n^2 + n.$$

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.
Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.
Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.
Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.

Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.
Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.
Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.

Nem mindig a legrövidebbet!

Mohó algoritmus

Algoritmus

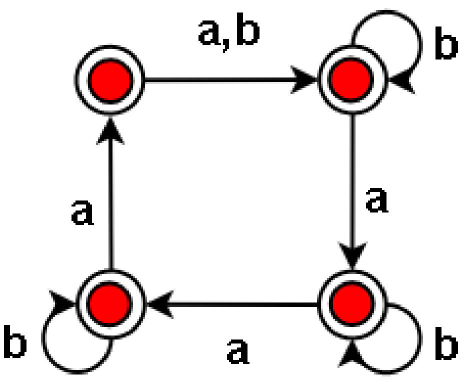
1. Kezdetben legyen $S = Q$ és $u = \varepsilon$.
2. Ha $|S| = 1$, vége, u irányítja M-et.
3. Legyen $v \in A^*$ egy legrövidebb olyan szó, amire $|Sv| < |S|$.
4. $S := Sv$, $u := uv$, menjünk a 2. pontra.

Tények

Az algoritmus irányító szót ad vissza.
Nem mindig a legrövidebbet!

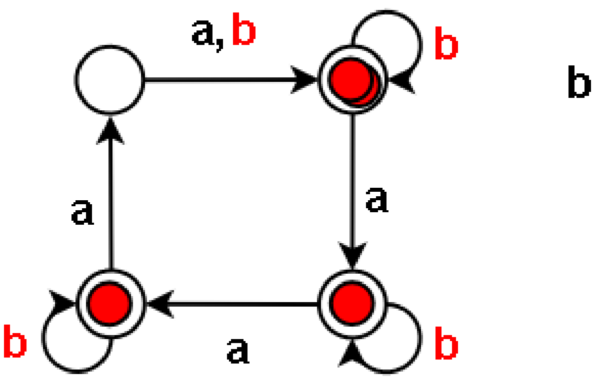
Szuboptimalitás

Példa



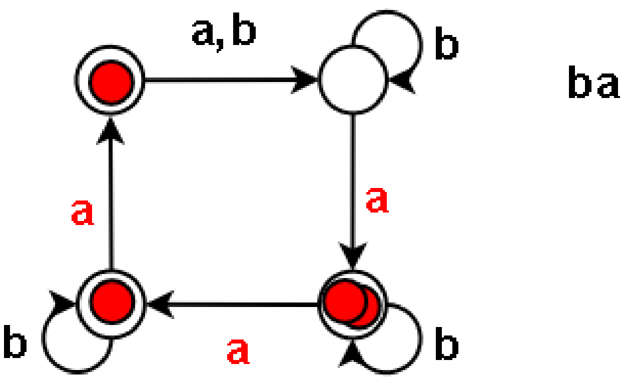
Szuboptimalitás

Példa



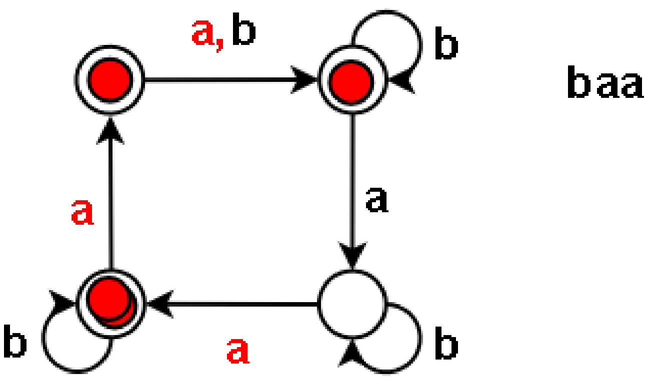
Szuboptimalitás

Példa



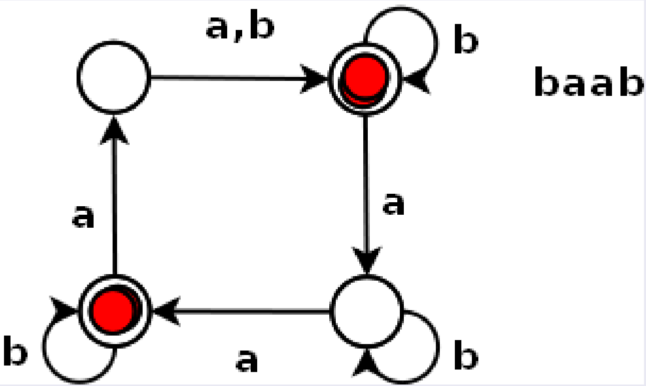
Szuboptimalitás

Példa



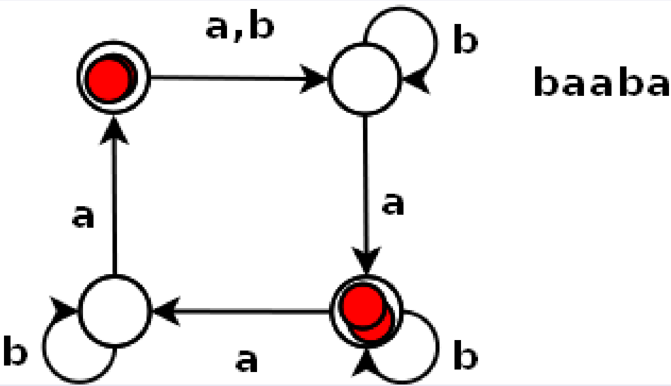
Szuboptimalitás

Példa



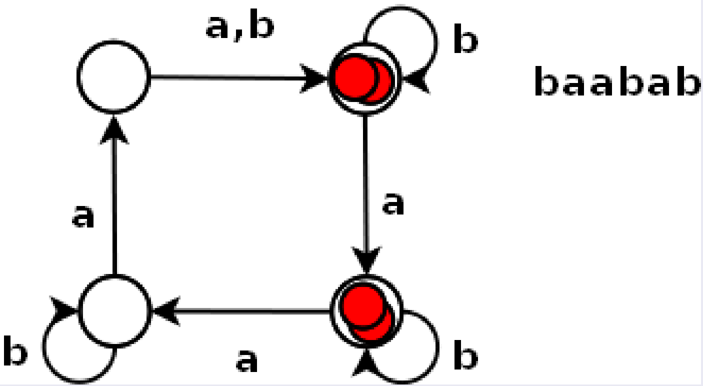
Szuboptimalitás

Példa



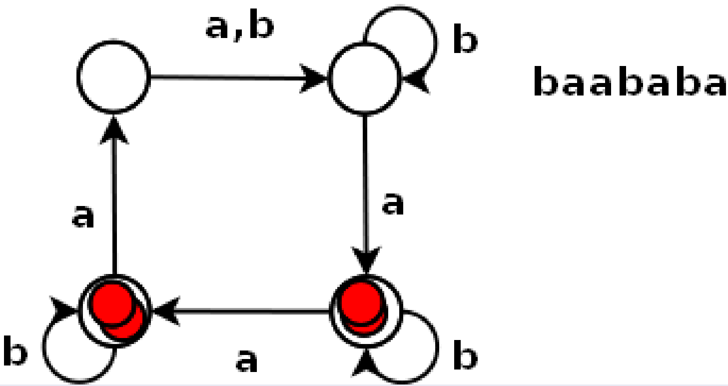
Szuboptimalitás

Példa



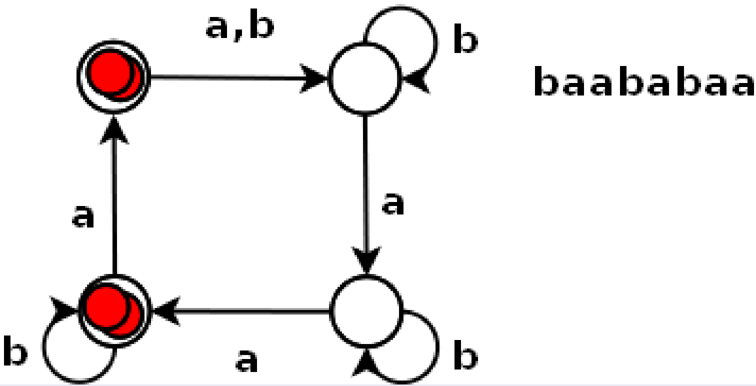
Szuboptimalitás

Példa



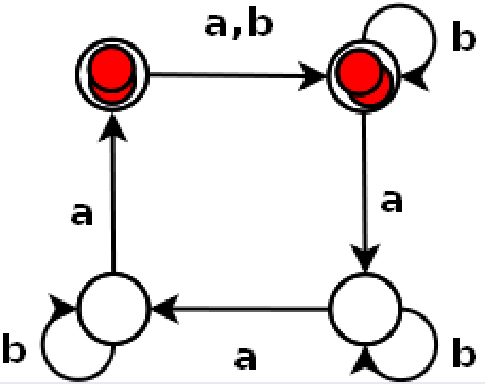
Szuboptimalitás

Példa



Szuboptimalitás

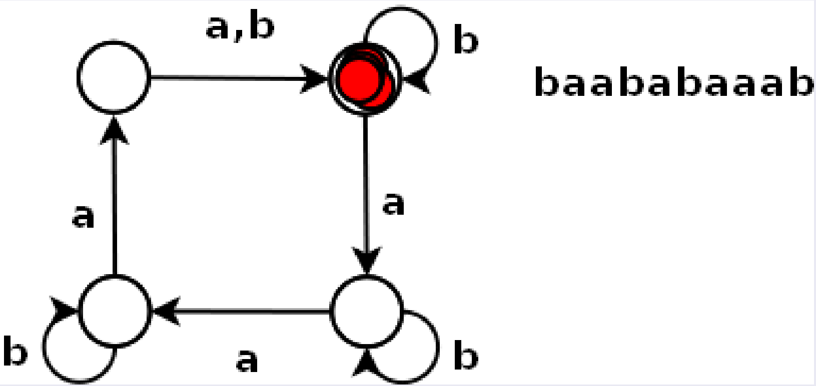
Példa



baababaaa

Szuboptimalitás

Példa



10 hosszú!

Extremális halmazelmélet

Tétel (Frankl, 1982)

Ha $A_1, \ldots, A_m$ r-elemű, $B_1, \ldots, B_m$ pedig s-elemű halmazok úgy, hogy

- minden i-re $A_i \cap B_i = \emptyset$ és
- minden $i < j$-re $A_i \cap B_j \neq \emptyset$,

akkor $m \leq \binom{r+s}{s}$.

Következmény (Pin, 1983)

$$d(n) \leq \frac{n^3 - n}{6}$$

Hogy?

A mohó algoritmus elemzésével.

Extremális halmazelmélet

Tétel (Frankl, 1982)

Ha $A_1, \ldots, A_m$ r-elemű, $B_1, \ldots, B_m$ pedig s-elemű halmazok úgy, hogy

- minden i-re $A_i \cap B_i = \emptyset$ és
- minden $i < j$-re $A_i \cap B_j \neq \emptyset$,

akkor $m \leq \binom{r+s}{s}$.

Következmény (Pin, 1983)

$$d(n) \leq \frac{n^3 - n}{6}$$

Hogy?

A mohó algoritmus elemzésével.

Extremális halmazelmélet

Tétel (Frankl, 1982)

Ha $A_1, \ldots, A_m$ r-elemű, $B_1, \ldots, B_m$ pedig s-elemű halmazok úgy, hogy

- minden i-re $A_i \cap B_i = \emptyset$ és
- minden $i < j$-re $A_i \cap B_j \neq \emptyset$,

akkor $m \leq \binom{r+s}{s}$.

Következmény (Pin, 1983)

$$d(n) \leq \frac{n^3 - n}{6}$$

Hogy?

A mohó algoritmus elemzésével.

Itt tartunk!

Eddig tehát ennyi ismert:

$$(n-1)^2 \;\leq\; d(n) \;\leq\; \frac{n^3-n}{6}.$$

Speciális esetek

A sejtés igaz, ha M...

- ...prím darab állapotú és benne egy betű ciklikus permutációt indukál (Pin, 1978);
- ...akárhány állapotú és benne egy betű ciklikus permutációt indukál (Dubuc, 1998);
- ...átmenetgráfjában van Euler-kör (Kari, 2003);
- ...aperiodikus (Trahtman, 2007);
- ...

...de az általános esetben továbbra is nyitott a kérdés.

Itt tartunk!

Eddig tehát ennyi ismert:

$$(n-1)^2 \;\leq\; d(n) \;\leq\; \frac{n^3-n}{6}.$$

Speciális esetek

A sejtés igaz, ha M...

- ...prím darab állapotú és benne egy betű ciklikus permutációt indukál (Pin, 1978);
- ...akárhány állapotú és benne egy betű ciklikus permutációt indukál (Dubuc, 1998);
- ...átmenetgráfjában van Euler-kör (Kari, 2003);
- ...aperiodikus (Trahtman, 2007);
- ...

...de az általános esetben továbbra is nyitott a kérdés.

Parciális automaták irányítása

Parciális automaták

Parciális automata

Parciális automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q, A: mint korábban;
- $\delta : Q \times A \to Q$ parciális függvény.

pu, Pu

δ ismét kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \to Q$ parciális függvénnyé.

$pu = q$: $\delta(p, u)$ értelmezett és eredménye q.

$Pu = R$: $\delta(p, u)$ értelmezett minden $p \in P$-re és $R = \{pu : p \in P\}$.

Parciális automaták

Parciális automata

Parciális automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q, A: mint korábban;
- $\delta : Q \times A \to Q$ parciális függvény.

pu, Pu

δ ismét kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \to Q$ parciális függvénnyé.

$pu = q$: $\delta(p, u)$ értelmezett és eredménye q.

$Pu = R$: $\delta(p, u)$ értelmezett minden $p \in P$-re és $R = \{pu : p \in P\}$.

Parciális automaták

Parciális automata

Parciális automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q, A: mint korábban;
- $\delta : Q \times A \to Q$ parciális függvény.

pu, Pu

δ ismét kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \to Q$ parciális függvénnyé.
$pu = q$: $\delta(p, u)$ értelmezett és eredménye q.
$Pu = R$: $\delta(p, u)$ értelmezett minden $p \in P$-re és $R = \{pu : p \in P\}$.

Parciális automaták

Parciális automata

Parciális automata: egy $M = (Q, A, \delta)$ hármas, ahol

- Q, A: mint korábban;
- $\delta : Q \times A \to Q$ parciális függvény.

pu, Pu

δ ismét kiterjeszthető egy $\delta : Q \times A^* \to Q$ parciális függvénnyé.
$pu = q$: $\delta(p, u)$ értelmezett és eredménye q.
$Pu = R$: $\delta(p, u)$ értelmezett minden $p \in P$-re és $R = \{pu : p \in P\}$.

Irányítás

Irányító szó

Az u szó irányítja az M parciális automatát, ha $|Qu| = 1$.
(pu minden $p \in Q$-ra értelmezett kell legyen!)
M irányítható, ha van irányító szava.

$d_p(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d_p(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

$d_p(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d_p(n) = \max\{d_p(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos parc. automata}\}.$$

Irányítás

Irányító szó

Az u szó irányítja az M parciális automatát, ha $|Qu| = 1$.
(pu minden $p \in Q$-ra értelmezett kell legyen!)
M irányítható, ha van irányító szava.

$d_p(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d_p(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

$d_p(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d_p(n) = \max\{d_p(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos parc. automata}\}.$$

Irányítás

Irányító szó

Az u szó irányítja az M parciális automatát, ha $|Qu| = 1$.
(pu minden $p \in Q$-ra értelmezett kell legyen!)
M irányítható, ha van irányító szava.

$d_p(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d_p(M) = \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

$d_p(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d_p(n) = \max\{d_p(M) : M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos parc. automata}\}.$$

Irányítás

Irányító szó

Az u szó irányítja az M parciális automatát, ha $|Qu| = 1$.
(pu minden $p \in Q$-ra értelmezett kell legyen!)
M irányítható, ha van irányító szava.

$d_p(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d_p(M) \;=\; \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

$d_p(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d_p(n) \;=\; \max\{d_p(M) : \; M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos parc. automata}\}.$$

Irányítás

Irányító szó

Az u szó irányítja az M parciális automatát, ha $|Qu| = 1$.
(pu minden $p \in Q$-ra értelmezett kell legyen!)
M irányítható, ha van irányító szava.

$d_p(M)$

Ha M irányítható, legyen

$$d_p(M) \ = \ \min\{|u| : u \text{ irányítja } M\text{-et}\}.$$

$d_p(n)$

Ha $n \geq 1$, legyen

$$d_p(n) \ = \ \max\{d_p(M) : \ M \text{ irányítható, } n\text{-állapotos parc. automata}\}.$$

$d_p(n) = O(2^n)$

Hogy?

A hatványautomatás konstrukció itt is működik.

Javítás?

A páronkénti összeejthetőség most kevés.

Példa

$d_p(n) = O(2^n)$

Hogy?

A hatványautomatás konstrukció itt is működik.

Javítás?

A páronkénti összeejthetőség most kevés.

Példa

$d_p(n) = O(2^n)$

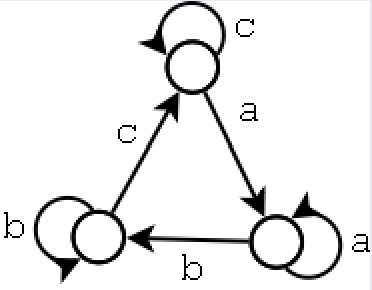
Hogy?

A hatványautomatás konstrukció itt is működik.

Javítás?

A páronkénti összeejthetőség most kevés.

Példa



$d_p(n) = \Omega(\sqrt{2}^n)$ (Ito-Tsuji, 2004)

Konstrukció

Legyen $n = 2m$ páros, $Q = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $A = \{a, b_1, \ldots, b_m, c\}$ és δ a következő:

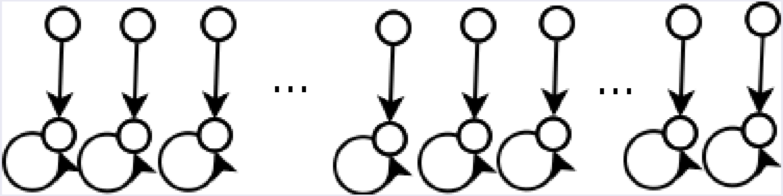
Az a betűhöz tartozó átmenet

$d_p(n) = \Omega(\sqrt{2}^n)$ (Ito-Tsuji, 2004)

Konstrukció

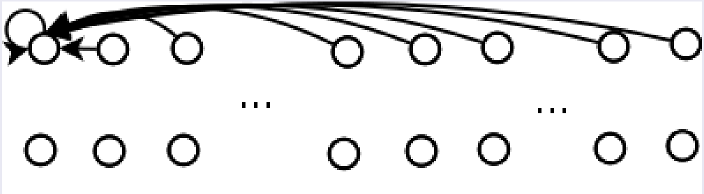
Legyen $n = 2m$ páros, $Q = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $A = \{a, b_1, \ldots, b_m, c\}$ és δ a következő:

Az a betűhöz tartozó átmenet



$d_p(n) = \Omega(\sqrt{2}^n)$ (Ito-Tsuji, 2004)

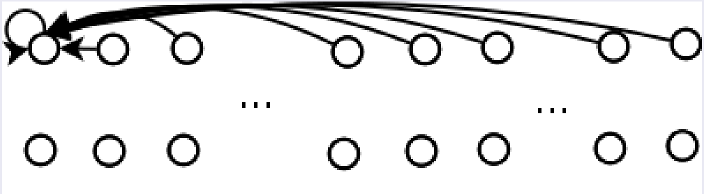
A c betűhöz tartozó átmenet



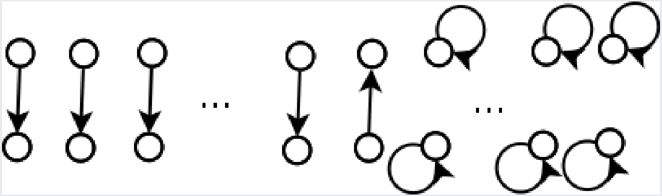
A b_i, $1 \leq i \leq m$ betűhöz tartozó átmenet

$d_p(n) = \Omega(\sqrt{2}^n)$ (Ito-Tsuji, 2004)

A c betűhöz tartozó átmenet

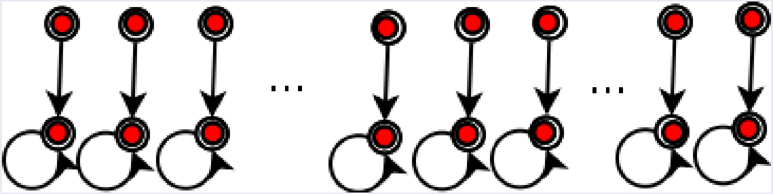


A b_i, $1 \leq i \leq m$ betűhöz tartozó átmenet



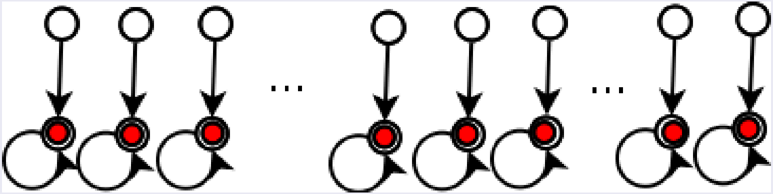
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



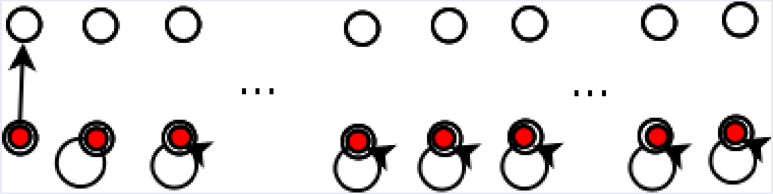
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



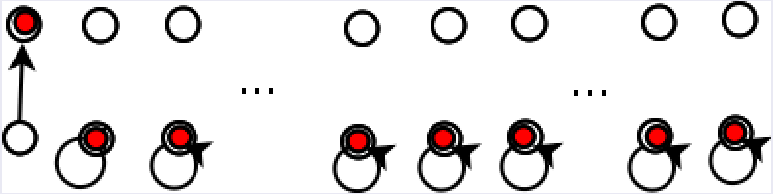
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



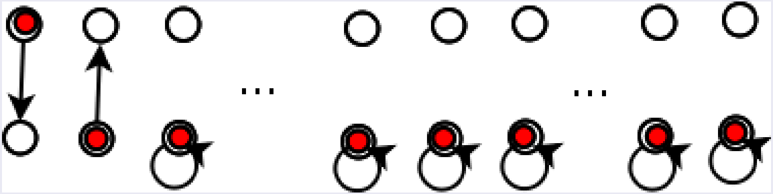
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



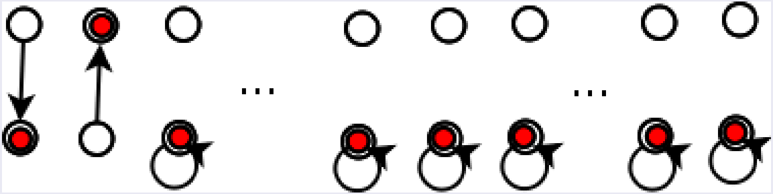
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



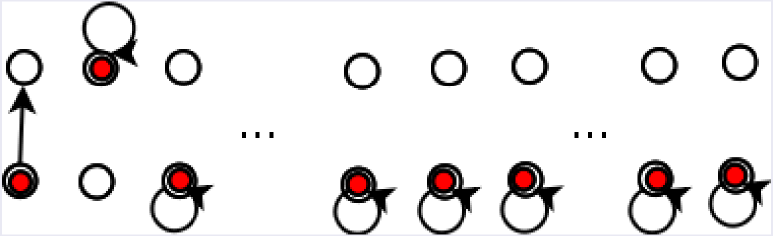
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



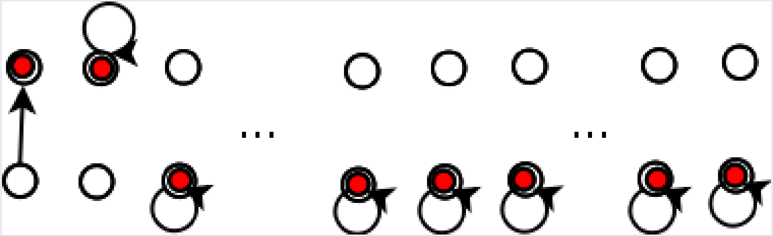
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



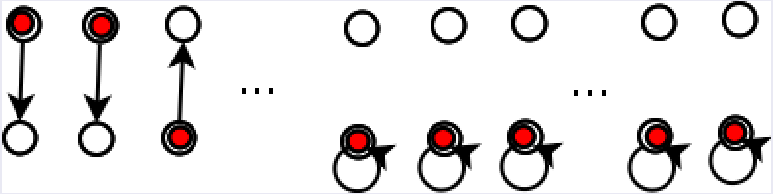
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



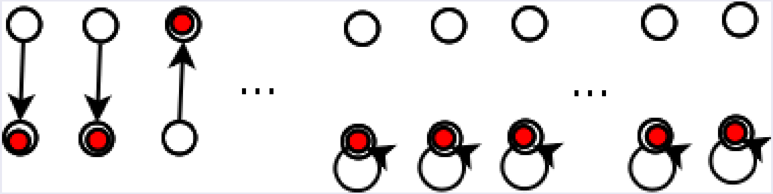
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



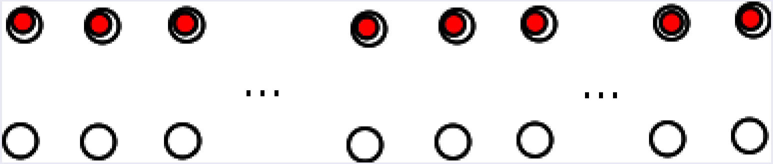
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



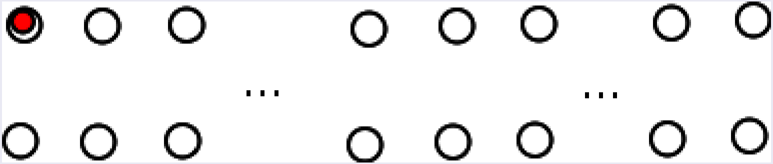
Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



Az automata irányítható

Ezt az automatát a következőképp tudjuk irányítani:



A szó hossza $2^m + 1 = 2^{n/2} + 1 = \Omega(\sqrt{2}^n)$.

$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n)$ (P. Martyugin, 2005)

Tétel

$$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n)$$

Hogy?

Ugyanez hármas számrendszerben...

Írjunk cikket a négyes számrendszerről?

Nem, további variálásával a számrendszernek már nem lesz jobb...

$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n)$ (P. Martyugin, 2005)

Tétel

$$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n)$$

Hogy?

Ugyanez hármas számrendszerben...

Írjunk cikket a négyes számrendszerről?

Nem, további variálásával a számrendszernek már nem lesz jobb...

$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n)$ (P. Martyugin, 2005)

Tétel

$$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n)$$

Hogy?

Ugyanez hármas számrendszerben...

Írjunk cikket a négyes számrendszerről?

Nem, további variálásával a számrendszernek már nem lesz jobb...

$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$ (Zs. Gazdag, Sz. Iván, J. Nagy-György, 2009)

Tétel

$$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

A továbbiakban rögzítsünk egy $M = (Q, A, \delta)$ irányítható parciális automatát, és legyen $n = |Q|$.

Bizonyítás – vázlat

- Először belátjuk, hogy van olyan $u \in A^*$, amire $|Qu| \leq n/3$ és $|u| \leq n \cdot \sqrt[3]{4}^n$.
- Aztán ezt a szót használjuk még $n/3$-szor.

$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$ (Zs. Gazdag, Sz. Iván, J. Nagy-György, 2009)

Tétel

$$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

A továbbiakban rögzítsünk egy $M = (Q, A, \delta)$ irányítható parciális automatát, és legyen $n = |Q|$.

Bizonyítás – vázlat

- Először belátjuk, hogy van olyan $u \in A^*$, amire $|Qu| \leq n/3$ és $|u| \leq n \cdot \sqrt[3]{4}^n$.
- Aztán ezt a szót használjuk még $n/3$-szor.

$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$ (Zs. Gazdag, Sz. Iván, J. Nagy-György, 2009)

Tétel

$$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

A továbbiakban rögzítsünk egy $M = (Q, A, \delta)$ irányítható parciális automatát, és legyen $n = |Q|$.

Bizonyítás – vázlat

- Először belátjuk, hogy van olyan $u \in A^*$, amire $|Qu| \leq n/3$ és $|u| \leq n \cdot \sqrt[3]{4}^n$.
- Aztán ezt a szót használjuk még $n/3$-szor.

$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$ (Zs. Gazdag, Sz. Iván, J. Nagy-György, 2009)

Tétel

$$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

A továbbiakban rögzítsünk egy $M = (Q, A, \delta)$ irányítható parciális automatát, és legyen $n = |Q|$.

Bizonyítás – vázlat

- Először belátjuk, hogy van olyan $u \in A^*$, amire $|Qu| \leq n/3$ és $|u| \leq n \cdot \sqrt[3]{4}^n$.
- Aztán ezt a szót használjuk még $n/3$-szor.

$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$ (Zs. Gazdag, Sz. Iván, J. Nagy-György, 2009)

Tétel

$$d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

A továbbiakban rögzítsünk egy $M = (Q, A, \delta)$ irányítható parciális automatát, és legyen $n = |Q|$.

Bizonyítás – vázlat

- Először belátjuk, hogy van olyan $u \in A^*$, amire $|Qu| \leq n/3$ és $|u| \leq n \cdot \sqrt[3]{4}^n$.
- Aztán ezt a szót használjuk még $n/3$-szor.

Halmazrendszerek ismétlés

Transzverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-transzverzális, ha minden Θ-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

Szemitranszverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-szemitranszverzális, ha minden Θ-osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz.

Halmazrendszerek ismétlés

Transzverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-transzverzális, ha minden Θ-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

Szemitranszverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-szemitranszverzális, ha minden Θ-osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz.

Halmazrendszerek ismétlés

Transzverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-transzverzális, ha minden Θ-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

Szemitranszverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-szemitranszverzális, ha minden Θ-osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz.

Halmazrendszerek ismétlés

Transzverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-transzverzális, ha minden Θ-osztályból pontosan egy elemet tartalmaz.

Szemitranszverzális

Legyen Θ egy ekvivalencia-reláció Q-n. $P \subseteq Q$ egy Θ-szemitranszverzális, ha minden Θ-osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz.

A (szemi)transzverzálisok száma

Lemma

Ha Θ egy k indexű ekvivalencia-reláció, akkor legfeljebb 2^{n-k} különböző Θ-transzverzális létezik.

Lemma

Ha Θ egy k indexű ekvivalencia-reláció, akkor legfeljebb $\left(\frac{n+k}{k}\right)^k$ különböző Θ-szemitranszverzális létezik.

A (szemi)transzverzálisok száma

Lemma

Ha Θ egy k indexű ekvivalencia-reláció, akkor legfeljebb 2^{n-k} különböző Θ-transzverzális létezik.

Lemma

Ha Θ egy k indexű ekvivalencia-reláció, akkor legfeljebb $\left(\frac{n+k}{k}\right)^k$ különböző Θ-szemitranszverzális létezik.

A (szemi)transzverzálisok száma

Lemma

Ha Θ egy k indexű ekvivalencia-reláció, akkor legfeljebb 2^{n-k} különböző Θ-transzverzális létezik.

Lemma

Ha Θ egy k indexű ekvivalencia-reláció, akkor legfeljebb $\left(\frac{n+k}{k}\right)^k$ különböző Θ-szemitranszverzális létezik.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \Leftrightarrow pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \;\Leftrightarrow\; pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p \Theta q \;\Leftrightarrow\; pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.

  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv \Theta qv$. (Ilyen szó van.)

  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.

  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.

  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n-k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k=1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n-k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n-k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \leq k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \leq n - k$ és $|u_k| \leq k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \;\Leftrightarrow\; pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \neq q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \leq 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

A transzverzálisok köze a témához

Lemma

Tetszőleges $1 \le k < n$-hez létezik olyan u_k, amire $|Qu_k| \le n - k$ és $|u_k| \le k2^{k-1}$.

Bizonyítás

Indukció k-ra. $k = 1$ triviális, kell legyen egy $a \in A$, amire $|Qa| < n$.

- Ha $|Qu_k| < n - k$, akkor $u_{k+1} = u_k$ jó lesz.
- Egyébként legyen $p\Theta q \iff pu_k = qu_k$. Θ egy $n - k$ indexű ekvivalenciareláció. Jelölje P a Qu_k halmazt.
  Vegyünk egy legrövidebb v szót, amire Pv definiált és melyre létezik $p \ne q \in P$: $pv\Theta qv$. (Ilyen szó van.)
  Akkor v összes v' valódi prefixére Pv' egy Θ-transzverzális. Mivel v legrövidebb, különbözőek.
  Tehát $|v|$ legfeljebb a különböző Θ-transzverzálisok száma: $|v| \le 2^k$.
  Akkor $u_{k+1} = u_k v u_k$ jó lesz, a hossza legfeljebb $2 \cdot k2^{k-1} + 2^k = (k+1)2^k$, kész.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \le m$ és $|u| \le m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \iff pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \;\Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

$d_3(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n)$

Legyen $n = 3m$. Előző lemma szerint egy u szóra $|Qu| \leq m$ és $|u| \leq m2^{2m}$. Legyen $p\Theta q \ \Leftrightarrow pu = qu$.

Algoritmus

- Legyen $w = u$ és $P = Qu$.
- Ha $|P| = 1$, vége, adjuk vissza w-t.
- Különben vegyünk egy legrövidebb olyan v szót, amire létezik $p \neq q \in P$ úgy, hogy $pv\Theta qv$.
- Legyen $w = wvu$ és $P = Pvu$. Menjünk a 2. pontra.

Az algoritmus elemzése

w

Egyrészt w irányítja M-et.

Másrészt $|w|$ legfeljebb m-szer $|u|$, plusz a különböző Θ-szemitranszverzálisok száma, vagyis

$$
\begin{aligned}
d_p(M) &\le m \cdot |u| + \left(\frac{n+m}{m}\right)^m \\
&\le m^2 \cdot 2^{2m} + \left(\frac{n+m}{m}\right)^m \\
&\le n^2 \cdot 2^{2n/3} + \left(\frac{4n/3}{n/3}\right)^{n/3} \\
&= O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).
\end{aligned}
$$

Az algoritmus elemzése

w

Egyrészt w irányítja M-et.
Másrészt $|w|$ legfeljebb m-szer $|u|$, plusz a különböző Θ-szemitranszverzálisok száma, vagyis

$$\begin{aligned} d_p(M) &\le m \cdot |u| + \left(\frac{n+m}{m}\right)^m \\ &\le m^2 \cdot 2^{2m} + \left(\frac{n+m}{m}\right)^m \\ &\le n^2 \cdot 2^{2n/3} + \left(\frac{4n/3}{n/3}\right)^{n/3} \\ &= O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n). \end{aligned}$$

Az algoritmus elemzése

w

Egyrészt w irányítja M-et.
Másrészt $|w|$ legfeljebb m-szer $|u|$, plusz a különböző Θ-szemitranszverzálisok száma, vagyis

$$\begin{aligned} d_p(M) &\leq m \cdot |u| + \left(\frac{n+m}{m}\right)^m \\ &\leq m^2 \cdot 2^{2m} + \left(\frac{n+m}{m}\right)^m \\ &\leq n^2 \cdot 2^{2n/3} + \left(\frac{4n/3}{n/3}\right)^{n/3} \\ &= O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n). \end{aligned}$$

Összefoglalás – az általános eset

Ismert korlátok

$$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n) \text{ és } d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

Szerintünk...

$$d_p(n) = \Theta(p(n) \cdot \sqrt[3]{3}^n)$$

valami $p(n)$ polinomra.

Összefoglalás – az általános eset

Ismert korlátok

$$d_p(n) = \Omega(\sqrt[3]{3}^n) \text{ és } d_p(n) = O(n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n).$$

Szerintünk...

$$d_p(n) = \Theta(p(n) \cdot \sqrt[3]{3}^n)$$

valami $p(n)$ polinomra.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \ldots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns. Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \ldots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns.
Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \ldots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns. Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \ldots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns. Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \ldots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns.
Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \dots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns. Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

Alsó korlát, ha $A = \{a, b, c\}$

Konstrukció

Legyen π a $Q = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja és $C_1, \ldots, C_k$ ennek osztályai. Minden $1 \leq i \leq k$-ra legyen $p_i \in C_i$ egy reprezentáns. Definiáljuk a következő $M = (Q, \{a, b, c\}, \delta)$ parciális automatát:

- minden $q \in Q$-ra qa legyen a q osztályának a reprezentáns eleme;
- minden $q \in Q$-ra qb legyen $\pi(q)$;
- minden $q \in Q$-ra qc pontosan akkor definiált, ha $\pi(q) = p_i$ valamely $1 \leq i \leq k$-ra.

Akkor M irányítható, a legrövidebb irányító szavának hossza: $o(\pi) + 1$, ahol $o(\pi)$ a π rendje, vagyis a legkisebb $k \geq 1$, amire $\pi^k = \mathrm{id}_Q$.

S_n rendje szuperpolinom

Tétel (Landau, 1903)

Egy n-elemű halmazon egy maximális rendű permutáció rendje

$$e^{\Theta(\sqrt{n \cdot \ln n})}.$$

Következmény

Hárombetűs ábécére megszorítva is,

$$d_p(n) = \Omega(c^{\sqrt{n \cdot \ln n}})$$

alkalmas $c > 1$ konstansra.

Nyitott kérdés

Igaz-e, hogy $d_p(n) = \Omega(c^n)$ valamilyen $c > 1$-re ebben az esetben is?

S_n rendje szuperpolinom

Tétel (Landau, 1903)

Egy n-elemű halmazon egy maximális rendű permutáció rendje

$$e^{\Theta(\sqrt{n \cdot \ln n})}.$$

Következmény

Hárombetűs ábécére megszorítva is,

$$d_p(n) = \Omega(c^{\sqrt{n \cdot \ln n}})$$

alkalmas $c > 1$ konstansra.

Nyitott kérdés

Igaz-e, hogy $d_p(n) = \Omega(c^n)$ valamilyen $c > 1$-re ebben az esetben is?

S_n rendje szuperpolinom

Tétel (Landau, 1903)

Egy n-elemű halmazon egy maximális rendű permutáció rendje

$$e^{\Theta(\sqrt{n \cdot \ln n})}.$$

Következmény

Hárombetűs ábécére megszorítva is,

$$d_p(n) = \Omega(c^{\sqrt{n \cdot \ln n}})$$

alkalmas $c > 1$ konstansra.

Nyitott kérdés

Igaz-e, hogy $d_p(n) = \Omega(c^n)$ valamilyen $c > 1$-re ebben az esetben is?

Házi feladat

Javítsunk meg a következő korlátok közül legalább hármat!

	Ω	O
$d(n)$	$(n-1)^2$	$\frac{n^3-n}{6}$
$d_p(n)$	$\sqrt[3]{3}^n$	$n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n$
$d_{p,3}(n)$	$c^{\sqrt{n \cdot \ln n}}$	$n^2 \cdot \sqrt[3]{4}^n$

Köszönöm a figyelmet.